Cálculo I

Ejercicios - Tema 2
Funciones, límites y continuidad

1.1 Funciones

Ejercicio 1.1.1. Esboza las gráficas de las siguientes funciones.

i) $\sqrt{x-3}+2$	*ii*) $(x-2)^3-1$	*iii*) $4-(x-1)^2$	*iv*) $3-(x-1)^{1/3}$
v) $\lvert x-2\rvert$	*vi*) $\ln(x-2)$	*vii*) $\lvert \operatorname{sen}(x+1)\rvert$	*viii*) $e^{-x}+1$
ix) e^{x-3}	*x*) $5+\cos(x-1)$	*xi*) $\ln(x+5)$	*xii*) $1+\lvert x-5\rvert$

Ejercicio 1.1.2. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

i) $\dfrac{\sqrt{x-8}}{x-7}$	*ii*) $\left(\dfrac{x-3}{(x-4)^2}\right)^{1/2}$	*iii*) $\dfrac{x-2}{1+(x-3)^2}$	*iv*) $\ln(x^2-3x+2)$
v) $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$	*vi*) $\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x-3)}}$	*vii*) $\dfrac{1}{1-\ln(x+3)}$	*viii*) $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}$
ix) $\ln(x^2(x-3))$	*x*) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	*xi*) $\dfrac{1}{3+\cos x}$	*xii*) $\ln(1+\cos x)$

Ejercicio 1.1.3. Esboza la gráfica de una función cuyo dominio sea $[0,1]$ y cuya imagen sea el intervalo $[-1,2]$.

Ejercicio 1.1.4. La parte positiva y la parte negativa de una función $f(x)$, que se designan por f^+ y respectivamente f^-, se definen como

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\} \quad \text{y} \quad f^-(x)=\min\{0,f(x)\}.$$

i) Comprueba que $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ y $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$.

ii) Dibuja las gráficas de $f^+(x)$ y $f^-(x)$ en $[0,2\pi]$, para $f(x)=\operatorname{sen} x$.

Ejercicio 1.1.5. Determina cuando la función dada es inyectiva o no, hallando su inversa en caso de serlo.

i) $5x+3$ *ii*) x^5+1 *iii*) $(x+1)^3+2$ *iv*) $\dfrac{1}{x}$ *v*) $x^{3/5}$ *vi*) $(1-x)^4$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra que si $p,q\in\mathbb{N}$ y p,q son impares, la función $f(x)=x^{p/q}$ es una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que es inyectiva y sobreyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calcula la función inversa.

Ejercicio 1.1.7. Estudia si la función dada es par, impar o ninguna de las dos cosas.

i) x^3 *ii*) x^2 *iii*) $\operatorname{sen} x$ *iv*) $\dfrac{x^2}{1-|x|}$ *v*) $x^{3/5}$ *vi*) $x^2+\dfrac{1}{x}$

Ejercicio 1.1.8. Determina $f \circ g$ y $g \circ f$ en los siguientes casos.

i) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

iii) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 1.1.9. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Calcula $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.

Ejercicio 1.1.10. Estudia si las funciones siguientes son acotadas en los intervalos que se indican, dando alguna cota en caso de existir.

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ en $[-3, 3]$ *ii)* $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en $[0, 100]$

iii) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ en $\mathbb{R}$ *iv)* $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $(0, 1)$

v) $f(x) = \operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$ en $(0, 1)$ *vi)* $f(x) = x \operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$ en $(0, 1)$

1.2 Límites

Ejercicio 1.2.1. Estudia la existencia de límite de las siguientes funciones en los puntos indicados.

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \\ \dfrac{x^2}{x^2+7} & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

ii) $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si} \quad x \geq \sqrt{e} \\ 2 \operatorname{sen}(\dfrac{e\pi}{2x^2}) & \text{si} \quad x \geq \sqrt{e} \end{cases}$ en $x = \sqrt{e}$

Ejercicio 1.2.2. Estudia si existen los límites siguientes

i) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x \to 3} \operatorname{sen} \frac{1}{x-3}$

Ejercicio 1.2.3. Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}$. ¿Se puede definir f en el punto $x = 1$ de forma que sea continua en ese punto?, ¿y en $x = -1$?

Ejercicio 1.2.4. Demuestra que cuando $x \to 0$, las expresiones $\ln(x+1)$ y $1 + x$ son infinitésimos equivalentes. Utiliza este resultado para calcular aproximadamente el valor de $\ln 0,97$.

Ejercicio 1.2.5. Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = 6.$$

Ejercicio 1.2.6. Calcula los siguientes límites.

i)	$\lim_{x\to 0} \frac{-3x}{\lvert x\rvert}$	ii)	$\lim_{x\to 2} e^{-1/\lvert x-2\rvert}$	iii)	$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$
iv)	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+3}$	v)	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^8+x^6+8}{x^3+2x+1}$	vi)	$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$
vii)	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^3}$	viii)	$\lim_{n\to\infty} (\arctan 1)^x$	ix)	$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} 1/x$
x)	$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^3+5}$	xi)	$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x+5^x}$	xii)	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8}{2^x}$
xiii)	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{9x^2+x}{x^2+1}\right)^{\frac{x+1}{2x}}$	xiv)	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^{1/x}}$	xv)	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3x^2+1}$
xvi)	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^x \quad a>0$	xvii)	$\lim_{x\to\infty} (x^2+8x+6)^{1/x}$	xviii)	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x^2+3}{x}$
xix)	$\lim_{x\to\infty} \left(tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\right)^{3x}$	xx)	$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x})\right)^{1/x}$	xxi)	$\lim_{x\to 0} \frac{\log x+1}{2^x-1}$
xxii)	$\lim_{n\to\infty} \left(\log(1+\frac{1}{x})+1)\right)^{x+3}$	xxiii)	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}}$	xxiv)	$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{1/x}$
xxv)	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x+2}}$	xxvi)	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{3x^2+2}{x+3}}$	xxvii)	$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{e^x-e}$

1.3 Continuidad

Ejercicio 1.3.1. Sea $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

i) f esta definida en a ii) $f(a) = L$ iii) f es continua en a

Ejercicio 1.3.2. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+4} & \text{si } x \neq -4 \\ 0 & \text{si } x = -4 \end{cases}$. Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

i) f esta definida en -4 ii) El límite $\lim_{x\to -4} f(x)$, existe. iii) f es continua en -4

Ejercicio 1.3.3. Estudia el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas.

i) $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln(x+2)}$ ii) $\ln(5+\cos x)$ iii) $f(x) = \dfrac{1}{7+\cos x}$

Ejercicio 1.3.4. Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$.

i) $f(x) = \begin{cases} (x-3)\ln(ax) & \text{si} \quad x > 2 \\ \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2} & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 + (x-3)\operatorname{sen}(\frac{1}{x-3}) & \text{si} \quad x > 3 \\ e^{a+4x} & \text{si} \quad x \leq 3 \end{cases}$ en $x = 3$.

Ejercicio 1.3.5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Ejercicio 1.3.6. Estudia si la función $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ es acotada en el intervalo $[0, 10^4]$. ¿Es acotada en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 1.3.7. Prueba que la ecuación $e^{\frac{x}{2}} - 7x^2 = 0$, tiene al menos tres soluciones.

Ejercicio 1.3.8. Cuestiones. Siendo $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

i) Si f es periódica de periodo $T > 0$ en $D = \mathbb{R}$ y es continua en el intervalo $(0, T)$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

ii) Si f es una función par, entonces f no puede ser impar.

iii) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ si $x \in (0, a + \delta) \cap D$.

iv) Si $D = \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$, entonces existe $M > 0$ tal que $f(x) > 2$ para todo $x > M$.

v) Si $|x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}| \leq f(x) \leq x^2$, entonces $\lim\limits_{x \to o} f(x) = 0$.

vi) $f + g$ puede continua en a, aunque ni f ni g sean continuas en a.

vii) Si f es una función continua en $D = (0, 1)$, entonces f es acotada.

viii) Sea $g(x) = \dfrac{f(x)^3}{1 + f(x)^2}$, donde f es una función continua en $D = [-1, 1]$, entonces la función g alcanza máximo y mínimo absolutos en D.

ix) Si f es una función continua en $D = \mathbb{R}$, entonces f es acotada en el intervalo $(1, 1000)$.

x) Si f es una función continua en $D = \mathbb{R}$, entonces f es acotada en cualquier intervalo abierto (a, b).

xi) Si f es una función continua en $D = \mathbb{R}$, entonces f es acotada en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$.

xii) Si $D = \mathbb{R}$ y f es una función acotada en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es acotada en $\mathbb{R}$.

xiii) Si $f(x) = x^{23} - \dfrac{54}{x^2 - \operatorname{sen} x + 2}$, entonces f es acotada en el intervalo $[1, 1000]$.

xiv) Sean $f, g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dos funciones continuas, entonces existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

xv) Si $f(x) = \ln \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{8x}{\pi} \right) - \operatorname{sen} x$, entonces existe $c \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$.